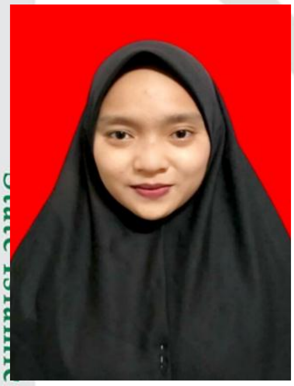
PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KOMPLEKS MENGGUNAKAN INVERS MOORE PENROSE

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi

oleh :

HILDA PRATIWI
11554202765



FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2021

LEMBAR PERSETUJUAN

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KOMPLEKS MENGGUNAKAN INVERS MOORE PENROSE

TUGAS AKHIR

oleh:

HILDA PRATIWI
11554202765

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 1 Juli 2020

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Dr. Yuslenita Muda, M.Sc**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19770103 200710 2 001**

LEMBAR PENGESAHAN

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KOMPLEKS MENGGUNAKAN INVERS MOORE PENROSE

TUGAS AKHIR

oleh:

HILDA PRATIWI
11554202765

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 1 Juli 2020

Pekanbaru, 1 Juli 2020
Mengesahkan

Dekan

Dr. H[illegible]no, M.Pd.
NIP. [illegible]640301 199203 1 003

Ketua Program Studi

Ari Pani Desvina, M.Sc.
NIP. 19811225 200604 2 003

DEWAN PENGUJI :

Ketua : **Dr. Rado Yendra, M.Sc.**

Sekretaris : **Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**

Anggota I : **Fitri Aryani, M.Sc.**

Anggota II : **Ade Novia Rahma, M.Mat.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 1 Juli 2021

Yang membuat pernyataan,

HILDA PRATIWI

11554202765

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdullah , kuucapkan puji dan syukur kepada Allah SWT atas rahmat, nikmat dan kasih saying-Nya saya dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.

☺ Motivasi Hidup ☺
"They said good things take times, that's why I'm always late"

Karya ini kupersembakan kepada:

Kedua orang tuaku (Suzanah dan Suhartono)

Kuucapkan terimakasih tak terhingga atas kasih dan sayang, segala dukungan, perhatian, serta selalu mendo'akan di setiap sujudmu tanpa mengenal lelah. Semoga Allah SWT selalu merahmati Ayahanda dan Ibunda serta memberikan kebahagiaan dunia dan akhirat, Amin..

Untuk Pembimbingku (Dr. Yuslenita Muda, M.Sc)

Terimakasih untuk segala rasa sabar, ikhlas dalam membimbing diri ini yang masih sering lalai dan banyak kekurangan. Terimakasih telah memberikan nasehat, masukan dan motivasi untuk penyelesaian tugas akhir ini.

Untuk Semua dosen Jurusan Matematika FST

Terimakasih untuk semua ilmu-ilmu yang diajarkan selama saya masih duduk di bangku kuliah dan nasehat serta motivasinya.

Untuk Sahabat Baikku

Untuk Gaby Yolanda Lubis dan Asdina Mahila terimakasih sudah menjadi sahabatku selama kurang lebih 10 tahun ini. Terimakasih atas kesabaran untuk selalu mendengar keluh kesahku, Terimakasih pula atas waktu yang kalian sisihkan untuk menemaniku.

Untuk Teman-teman Seperjuangan Matematika A

Terimakasih kuucapkan kepada Helsivianingsih, Laraza Yuliarti, Yollanda Wulandari Amir, Sarah Puspita, Kartika Swandayani. Terimakasih atas dukungan dan masukan dari kalian. Semoga pertemanan kita terus berlanjut dan selalu terjaga. Aamiin.

And the last I would like to say thanks to my beloved myself. Thanks to stay strong through the strom. Lebih kuat lagi ya ke depannya.

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KOMPLEKS MENGGUNAKAN INVERS MOORE PENROSE

HILDA PRATIWI
11554202765

Tanggal Sidang : 1 Juli 2021
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Sistem persamaan linear (SPL) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks $AX = B$ dengan A sebagai matriks koefisien . Koefisien pada SPL dapat berbentuk bilangan kompleks dan real sehingga matriks koefisien entrinya bisa berupa bilangan kompleks atau real pula. Pada skripsi ini akan dibahas penyelesaian SPL menggunakan Invers Moore Penrose. Metode Invers Moore yang dinotasikan dengan A^{+} di sini merupakan invers dari suatu matriks A yang nantinya akan menyelesaikan persamaan matriks di atas. Dengan kata lain penyelesaian persamaan matriks tersebut berbentuk $X = A^{+}B$, namun dikhususkan untuk SPL kompleks yang memiliki solusi. Berdasarkan penelitian yang dilakukan metode ini dapat digunakan dan menjadi salah satu alternatif untuk menyelesaikan SPL kompleks.

Kata Kunci: Matriks, Invers Moore Penrose, sistem persamaan linear kompleks.

SOLUTION OF COMPLEX LINEAR EQUATION SYSTEMS USING INVERS MOORE PENROSE

HILDA PRATIWI
11554202765

Date of Final Exam : 1^{st} *July 2021*
Date of Graduation : 1^{st} *July 2021*

Mathematics Deparment
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Linear Equation System can be written in the form of matrix $AX = B$, with A as coefficient matrix. Coefficient in Linear Equation System can be in the form of complex or real numbers, hence, the entries of coefficient matrix can also be a complex or real numbers. The topic of this study were discussed about Linear Equation System solutions by using Invers Moore Penrose. The Invers Moore method were notated as A^+, in this case, it was an invers from a certain matrix A which will later solve the matrix equation above. In other words, the solution to the matrix equation was $X = A^+B$, however it was devoted to complex Linear Equation Systems that have solutions. Based on research conducted the current method could be used and became one alternative to solve complex Linear Equation Systems.

Keywords: Matrix, Invers Moore Penrose, Complex Linear Equation Systems.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin.

Segala puji Allah *subhanahu waata'ala* atas yang senantiasa melimpahkan rahmat, karunia, dan petunjuk-Nya lah penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat beriringan salam kepada Nabi Muhammad *shallallahu 'alaihi wasallam* yang telah membawa kita dari zaman yang tidak berpengetahuan sampai zaman yang memiliki kemajuan ilmu dan teknologi yang kita rasakan pada saat ini.

Penelitian ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar sarjana sains dan teknologi pada jurusan matematika. Dalam penyusunan dan penyelesaian penelitian ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, petunjuk, perhatian serta semangat dari berbagai pihak terutama orang tua tercinta dan yang tersayang, Ayahanda (Suhartono) dan Ibunda (Suzanah) yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus dan terus melangkah, pelajaran hidup, juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Jasa-jasamu kan selalu kukenang hingga akhir hayatku dan semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan soleh, Aamiin. Kemudian penulis juga mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Khairunnas, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc, selaku Sekretaris Program Studi Matematika sekaligus selaku penguji pertama yang telah memberi kritik dan saran sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan lebih baik.
5. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc, selaku Pembimbing Tugas Akhir dan Pembimbing Akademik yang telah memberi bimbingan, pengarahan serta ilmunya.
6. Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat, selaku penguji kedua yang telah

memberi kritik dan saran sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan lebih baik.

7. Seluruh Dosen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. yang telah banyak memberi nasehat, bimbingan, serta bantuan kepada penulis.
8. Keluarga tercinta, yang telah memberikan motivasi, dukungan, do'a dan materi yang tak henti-hentinya serta kasih sayang yang sangat tulus kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika angkatan 2015 terkhusus lokal A.
10. Semua pihak yang telah banyak membantu baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian penelitian ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.
11. *Last but not least. I wanna thank me, for believe in me, for doing all hard work, for having no days off, for never quitting, for just being me at all times.*

Semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah *subhanahu waata'ala*. Aamiiin.

Dalam penulisan ini penulis sadar bahwa penelitian tugas akhir ini belum sempurna. Namun, penulis sudah berusaha untuk mencapai hasil yang maksimal. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhir kata penulis harap semoga penelitian tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak-pihak yang memerlukan.

Pekanbaru, 1 Juli 2021

Hilda Pratiwi

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Permasalahan yang sering kali ditemukan pada bidang aljabar linear adalah persoalan untuk mencari penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear. Sistem persamaan linear mempunyai beberapa bentuk pemecahan atau solusi, yaitu solusi tunggal, banyak solusi, dan tidak ada solusi.

Secara umum sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Dengan A adalah matriks koefisien, X adalah verktor kolom dari variabel-variabel yang tidak diketahui, dan B adalah vektor kolom dari konstanta. Terdapat berbagai macam matriks koefisen dan matriks konstanta, diantaranya ada yang berbentuk bilangan rill, bilangan kompleks, dan ada pula yang berbentuk bilangan fuzzy. Sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan beberapa metode, diantaranya metode metode invers, metode inverse Moore Penrose, metode dekomposisi LU, dekomposisi *colesky*, dekomposisi QR, dan masih banyak yang lainnya.

Penggunaan invers matriks sangat penting dalam menentukan solusi dari sistem persamaan linear $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ yang sesuai yaitu $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$. Pada peneltian kali ini akan digunakan metode invers Moore Penrose dalam penyelesaian sistem persamaan linear kompleks.

Pada tahun 1954, Rooger Penrose memperkenalkan suatu jenis invers yaitu invers Moore Penrose yang di mana merupakan invers matriks dari A yang akan memenuhi keempat persamaan Moore Penrose yang dilambangkan dengan A^{+}. Invers Moore Penrose sendiri bisa digunakan untuk setiap matriks, baik persegi singular dan non singular yang bukan matriks persegi. Pada tahun 2011 terdapat penelitian yang dilakukan oleh Astin Wita YuniHapsari [1] dengan judul Menentukan Invers Moore Penrose dari Matriks Kompleks yang membahas tentang invers Moore Penrose dari matriks kompleks yang dibatasi pada matriks sejati dan matriks bebas dengan membatasinya pada matriks berukuran $n \times n$ dan menentukan invers Moore Penrose dengan melihat $rank$nya. Pada tahun 2012 Dewi Yulianti [2] melakukan penelitian tentang menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks dengan metode SVD. Lalu pada tahun 2013 Iswahyuni Purwanti [3] melakukan penelitian yang membahas tentang penggunaan invers Moore Penrose untuk sistem persamaan linear dengan judul Invers Moore Penrose dan Aplikasinya Pada Sistem Persamaan Linear. Setelah itu pada tahun 2019 terdapat juga penelitian yang dilakukan oleh Yuli Yanti dkk [4] dengan judul Invers Moore Penrose Sebagai Matriks Invers, dimana pada penelitian tersebut membahas tentang matriks invers tergeneralisai menggunakan Invers Moore Penrose.

Maka berdasarkan penelitian di atas penulis tertarik untuk menggunakan Invers Moore Penrose untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan koefisien bilangan kompleks. Sehingga penelitian tugas akhir ini berjudul **"Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Kompleks Menggnakan Invers Moore Penrose"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang penelitian maka dapat diambil rumusan masalah pada penelitian ini yaitu "Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear kompleks dengan menggunakan invers Moore Penrose?"

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah yang diberikan yaitu:

1. Sistem persamaan linear kompleks yang akan diselesaikan adalah sistem persamaan linear kompleks yang memiliki solusi.
2. Sistem persamaan linear kompleks dengan m persamaan dan n variabel dimana $m \leq 5$ dan $n \leq 5$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan invers Moore Penrose dan mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear kompleks.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

a. Bagi Penulis

Adapun manfaat yang didapatkan melalui penelitian ini adalah memperdalam pemahaman penulis dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji suatu permasalahan aljabar linear khususnya dalam menemukan penyelesaian sistem persamaan linear kompleks dengan menggunakan invers Moore Penrose.

b. Bagi Lembaga Pendidikan

Sebagai referensi untuk menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks dengan menggunakan invers Moore Penrose.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini adalah :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi materi pendukung yang berkaitan dengan bilangan kompleks, konjugat kompleks, transpos konjugat, pengertian matriks, determinan matriks, invers matriks, rank matriks, sistem persamaan linear, sistem persamaan linear kompleks, invers Moore Penrose.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisikan langkah-langkah atau prosedur dalam penyelesaian sistem persamaan linear kompleks dengan menggunakan invers Moore Penrose.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisikan penjelasan menemukan penyelesaian sistem persamaan linear kompleks dengan menggunakan invers Moore-Penrose.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisikan kesimpulan dari hasil dan saran dari penulis.

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab II ini berisi materi pendukung yang dapat membantu menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Adapun materi pendukungnya antara lain tentang bilangan kompleks, konjugat kompleks, transpos konjugat, pengertian matriks, determinan matriks, invers matriks, rank matriks, sistem persamaan linear, sistem persamaan linear kompleks, dan invers Moore Penrose.

2.1 Bilangan Kompleks

Definisi 2.1 [5]: Bilangan kompleks dapat didefinisikan sebagaai pasangan berurut $z = (x, y)$ yang mana $x, y \in \mathbb{R}$.

i. Bagian rill z atau $Re(z) = x$.

ii. Bagian imajiner z atau $Im(z) = y$.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang operasi aljabar terhadap bilangan kompleks:

1. Operasi Penjumlahan

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. Opersasi Pengurangan

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

3. Operasi Perkalian

$$z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1x_2 + ix_1y_2) + (ix_2y_1 + i^2y_1y_2)$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

4. Operasi Pembagian

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_1}^2 + {y_2}^2} + i\,\frac{x_2y_1 + x_1y_2}{{x_1}^2 + {y_2}^2}$$

Contoh 2.1:

Diketahui dua bilangan kompleks sebagai berukut:

$z_1 = 2 + 5i$ dan $z_2 = 3 - 2i$

Akan ditentukan penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dari dua bilangan kompleks z_1 dan z_2.

Penyelesain:

1. $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2+5i) + (3-2i) \\ &= (2+3) + i(5-2) \\ &= 5 + 3i \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (2+5i) - (3-2i) \\ &= (2-3) + i\big(5-(-2)\big) \\ &= -1 + 7i \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} z_1 . z_2 &= (2+5i)(3-2i) \\ &= 6 - 4i + 15i + 10 \\ &= 16 + 11i \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2+5i}{3-2i} . \frac{3+2i}{3+2i} \\ &= \frac{6+6i+15i-10}{9+6i-6i+4} \\ &= \frac{-4+21i}{11} \\ &= \frac{-4}{11} + \frac{21}{11} i \end{aligned}$$

2.2 Konjugat Kompleks

Definisi 2.2 [6]: Jika $z = x + iy$ sebarang bilangan kompleks, maka konjugat atau sekawan z yang dinyatakan oleh $\bar{z}$, didefinisikan oleh $\bar{z} = x - iy$.

Perkalian antara bilangan kompleks dengan konjugat kompleksnya didefinisikan sebagai berikut:

$z\bar{z} = (x + y)(x - iy) = x^2 + y^2$

Kemudian, untuk modulus dan norma vektor dari bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut:

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

dan

$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

dimana $\|z\|$ adalah panjang vektor dari bilangan kompleks biasa disebut dengan norma (*norm*).

Contoh 2.2:

Diberikan bilangan kompleks dengan konjugat kompleksnya sebagai berikut:

$z = 4 - 7i$ dan $\bar{z} = 4 + 7i$

Akan ditentukan perkalian antara bilangan kompleks dengan konjugat kompleksnya dan norma vektor dari bilangan kompleks.

Penyelesaian:

1. Menentukan perkalian antara bilangan kompleks dengan konjugat kompleksnya

$$z\bar{z} = (4 - 7i)(4 + 7i)$$
$$= 16 + 28i - 28i + 49$$
$$= 65.$$

2. Menentukan norma vektor dari bilangan kompleks

$$\|z\| = \sqrt{|z|^2}$$
$$= \sqrt{z\bar{z}}$$
$$= \sqrt{(4 - 7i)(4 + 7i)}$$
$$= \sqrt{16 + 49}$$
$$= \sqrt{65}\ .$$

2.3 Transpos Konjugat

Definisi 2.3 [6]: Jika A adalah suatu matriks dengan entri-entri bilangan kompleks, maka transpos konjugat dari matriks A yang dinotasikan dengan A^*, didefinisikan sebagai $A^* = \bar{A}^T$ dimana $\bar{A}$ adalah suatu matriks yang entri-entrinya adalah konjugat kompleks dari entri-entri yang bersesuaian pada matriks A dan $\bar{A}^T$ transpos dari matriks A.

Contoh 2.3:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 1+2i & 2 & i \end{bmatrix}$ maka $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2+i & 0 \\ 1-2i & 2 & -i \end{bmatrix}$ sehingga $\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1-2i \\ 2+i & 2 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

2.4 Pengertian Matriks dan Opersi Matriks

Definisi 2.4 [6] Matriks adalah susunan dari bilangan-bilangan yang dibatasi dengan tanda kurung biasa ( ) atau kurung siku [ ] yang berbentuk persegi panjang dan disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang menyusun baris dan kolom dari suatu matriks disebut elemen-elemen matriks. Matriks tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan a_{ij} = elemen atau unsur matriks

$$i = 1, 2, 3, \dots, m \quad \text{dan} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Definisi 2.5 [6]: Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian dengan A dan selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada baris A

dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Contoh 2.4:

Perhatikan matriks-matriks berikut!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cari $A + B$ dan $B - A$

Penyelesaian:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.6 [6]: Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kali dari AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahjan hasil yang diperoleh.

Contoh 2.5:

Cari hasil perkalian dari kedua matriks berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Karena matriks A adalah matriks 2×3 dan matriks B adalah matriks 3×2 , maka hasil kali AB adalah matriks 2×2 sebagai berikut:

$$AB = \begin{bmatrix} 16 & 13 \\ 21 & 19 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.7 [6]: Jika A adalah matriks sebarang ukuran $m \times n$, maka transpos A dinyatakan oleh A^t dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari matriks A, dan seterusnya.

Contoh 2.6:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Maka $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

dimana matriks A^t adalah transpose dari matriks A dan B^t adalah transpose dari matriks B.

2.5 Determinan Matriks

Definisi 2.8 [6]: Diberikan suatu matriks bujur sangkar. Determinan matriks adalah suatu fungsi khusus yang menghubungkan suatu bilangan *real* dengan matriks bujur sangkar. Determinan dari matriks dapat dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

2.5.1 Metode Sarrus

Metode ini hanya dapat digunakan untuk mencari determinan matriks bujur sangkar 2×2 dan 3×3.

Determinan matriks orde 2×2

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ maka } |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}a_{21}$$

$$- \quad +$$

Contoh 2.7:

Diberikan matriks bujur sangkar ukuran 2×2 sebagai berikut:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan determinan matriks tersebut

Maka:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(6) - (4)(2)$$

$$= 18 - 8$$

$$= 10$$

Jadi, $\det(A) = 10$

Determinan matriks orde 3×3

Langkah-langkah untuk mencari determinan matriks bujur sangkar A dengan metode Sarrus sebagai berikut [7]:

1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua kemudian tempatkan di sebelah kanan tanda detrminan.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lainnya yang sejajar dengan diagonal utama. Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan $A(+)$.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$A(+) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{23}a_{32}$$

3. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lainnya yang sejajar dengan diagonal sekunder. Nyatakan jumlah hasil tersebut dengan $A(-)$.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$A(-) = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

4. Determinan matriks A adalah selisih antara $A(+)$ dan $A(-)$.

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{23}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$

Berikut diberikan contoh metode Sarrus.

Contoh 2.8:

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode Sarrus!

Penyelesaian:

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right.$$

$= [(1)\cdot(1)\cdot(3) + (2)\cdot(4)\cdot(5) + (3)\cdot(3)\cdot(1)] - [(3)\cdot(1)\cdot(5) + (1)\cdot(4)\cdot(1) + (2)\cdot(3)\cdot(3)]$

$= (3 + 40 + 9) - (15 + 4 + 18)$

$= 52 - 37$

$= 15$

Jadi, $\det(A) = 15$

2.5.2 Metode Ekspansi Kofaktor

Defenisi 2.9 [6] Jika A adalah matriks kuadrat, maka entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke i dan kolom ke j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

Kofaktor dan minor elemen a_{ij} hanya berbeda dalam tandanya, yakni $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Cara yang lebih baik untuk menentukan tanda yang menghubungkan C_{ij} dan M_{ij} pada baris ke i dan kolom ke j dari susunan berikut:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas maka didapat kofaktor:

$$C_{11} = M_{11}, C_{21} = -M_{21}, C_{43} = -M_{43}, \cdots, C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

Maka secara sistematis determinan matriks A dengan ordo $n \times n$ dapat dihitung dengan ekspasi kofaktor sebagai beri kut:

$\det(A) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$ atau $|A| = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}C_{ij}$

Contoh 2.9:

Diketahuhi matariks bujur sangkar dengan ukuran 4×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom ketiga dari matriks A!

Penyelesaian:

Entri a_{13} dan a_{23} adalah 0, maka yang akan dihitung C_{33} dan C_{43} saja.

$C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33}$

$= M_{33}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$= \left(1\begin{vmatrix}3 & 5\\5 & 4\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 4\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{vmatrix}\right)$

$= (1(-13) - 2(-7) + 4(1))$

$= (-13 + 14 + 4)$

$= 5$

dan

$C_{43} = (-1)^{4+3}M_{43}$

$= -M_{43}$

$= -\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\3 & 5 & 2\\4 & 1 & 3\end{vmatrix}$

$= -\left(1\begin{vmatrix}3 & 5\\4 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{vmatrix}\right)$

$= -(1(-17) - 2(-10) + 3(1))$

$= -(-17 + 20 + 3)$

$= -6$

Sehingga:

$\det(A) = a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43}$

$= a_{13}(M_{13}) + a_{23}(-M_{23}) + a_{33}M_{33} + a_{43}(-M_{43})$

$= 0 + 0 + 1(5) + 4(-6)$

$= 5 - 24$

$= -19$

Jadi, $\det(A) = -19$

2.6 Invers Matriks

Definisi 2.10 [6]: Jika A dan B matriks-matriks bujur sangkar sehingga $AB = BA = I$, dimana A disebut dapat dibalik atau *invertible* dan B disebut sebagai invers dari A. Jika matriks tidak dapat dibalik, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

Contoh 2.10:

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\1 & 3 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ memiliki $A^{-1} = \begin{bmatrix}-3 & -2 & 6\\0 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$

Dimana $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

dan $A^{-1}A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Definisi 2.11 [6] Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Contoh 2.11:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan $adj(A)$

Penyelesaian:

Kofaktor dari A berdasarkan Definisi 2.9 yaitu:

$C_{11} = 3$ $\quad C_{12} = 0$ $\quad C_{13} = -1$

$C_{21} = -2$ $\quad C_{22} = -1$ $\quad C_{23} = 0$

$C_{31} = -6$ $\quad C_{32} = -1$ $\quad C_{33} = 1$

Maka, matriks kofaktornya adalah

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dan adjoin dari A adalah

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.12 [6] Suatu matriks A dapat dibalik jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya telah diperoleh formula adjoin yang akan digunakan untuk mencari invers dari suatu matriks yang dapat dibalik. Berikut diberikan teorema untuk mencari invers tersebut.

Teorema 2.13 [6] Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Bukti berdasarkan [6]:

$$A\,adj(A) = \det(A)\,I$$

$$A\,adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-1 dan kolom ke-1 dari hasil kali $A\,adj(A)$ adalah

$a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$.

Entri pada baris ke-2 dan kolom ke-2 dari hasil kali $A\,adj(A)$ adalah

$a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} + \cdots + a_{2n}C_{2n}$.

Entri pada baris ke-3 dan kolom ke-3 dari hasil kali $A\,adj(A)$ adalah

$a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} + \cdots + a_{3n}C_{3n}$.

Begitu seterusnya hingga entri pada baris ke-i dan kolom ke-j, sehingga hasil kali $A\,adj(A)$ pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + a_{i3}C_{j3} + \cdots + a_{in}C_{jn}. \tag{2.1}$$

Jika $i = j$, maka Persamaan (2.1) adalah ekspansi kofaktor dari $\det(A)$ sepanjang baris ke-i dan jika $i \neq j$, maka semua a dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari A sehingga nilai dari Persamaan (2.1) adalah nol. Oleh karena itu

$$A\,adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix}$$

$$= \det(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det(A)\, I. \tag{2.2}$$

Karena A dapat dibalik, maka $\det(A) \neq 0$, sehingga Persamaan (2.2) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$A \left[\frac{1}{\det(A)} adj(A) \right] = I$$

dengan mengalikan kedua sisi di sebelah kiri dengan A^{-1} menghasilkan

$$A^{-1}A \left[\frac{1}{\det(A)} adj(A) \right] = A^{-1}I$$

$$I \left[\frac{1}{\det(A)} adj(A) \right] = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Contoh 2.12:

Tentukan invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ berikut menggunakan adjoin.

Penyelesaian:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$= [(1)\cdot(3)\cdot(3) + (2)\cdot(3)\cdot(1) + (4)\cdot(1)\cdot(2)] - [(4)\cdot(3)\cdot(1) + (1)\cdot(3)\cdot(2) + (2)\cdot(1)\cdot(3)]$

$= (9 + 6 + 8) - (12 + 6 + 6)$

$= 23 - 24$

$\det(A) = -1$

Berdasarkan penyelesaian adjoin pada Contoh 2.11 didapat

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga, dapat dihitung A^{-1} sebagai berikut

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.7 Rank Matriks

Definisi 2.14 [6]: Dimensi dari vektor baris (kolom) *non-zero* pada suatu matriks A disebut $rank$ dari A atau dapat dinyatakan sebagai $rank(A)$.

Pada matriks bujur sangkar A, jika vektor baris dan vektor kolom yang bebas linear mempunyai dimensi yang sama, maka dimensi matriks tersebut merupakan rank matriks.

Contoh 2.13:

Tentukan $rank$ matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2 + (-2)b_1 \\ b_3 + (-3)b_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-1/4)b_2 \\ 1/2b_3 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 - b_2 \\ \\ b_3 - b_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 7/2 \\ 0 & 1 & -2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka, $rank(A) = 2$.

2.8 Sistem Persamaan Linear

Suatu persamaan linear dalam n peubah (variabel) adalah dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Dimana $a_1,\ a_2, \cdots, a_n$ dan b adalah konstanta dan $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah variabel. Dengan demikian maka suatu sistem linear dari m persamaan dalam n peubah adalah satu sistem berbentuk:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \cdots \qquad (2.3)$$

dimana a_{ij} dan b_i semuanya adalah kontanta dan a_{ij} adalah koefisien dari variabel x_j.

Sistemn persamaan linear pada Persamaan (2.3) yang terdiri dari m persamaan linear dengan n variabel ekuivalen deangan persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ atau } AX = B \ \cdots (2.4)$$

yang mana $A = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien, $X = [x_j]$ adalah vektor kolom dari variabel-variabel, dan $B = [b_i]$ adalah vektor kolom dari konstanta. Koefisiean dalam sistem persamaan linear ada yang berbentuk bilangan rill dan adan yang berbentuk bilangan kompleks.

Sistem persamaan linear memiliki beberapa solusi diantaranya:

1. Solusi tunggal

Dikatakan memiliki solusi tunggal apabila terdapat satu titik dari sistem persamaan linear.

2. Banyak solusi

Dikatakan memiliki banyak solusi apabila terdapat banyak titik potong dari sistem persamaan linear.

3. Tidak ada solusi

Dikatakan tidak ada solusi apabila tidak ada titik potong dari sistem persamaan linear.

2.8.1 Sistem Persamaan Linear Kompleks

Definisi 2.15 [8]**:** Sistem persamaan linear kompleks adalah sistem persamaan linear yang mana koefiennya adalah bilangan kompleks. Pada sistem persamaan linear kompleks juga dapat diselesaikan dengan menggunakan operasi baris elementer.

Contoh 2.14:

Selesaikan sistem persamaan linear kompleks berikut dengan menggunakan Operasi Baris Elementer.

$$x_1 + \qquad + ix_3 = 2i$$

$$-ix_1 + x_2 \qquad = 3$$

Penyelesain:

1. Dari sistem persamaan linear kompleks di atas dapat diubah menjadi bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 2i \\ -i & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Dengan menambahkan baris ke 2 dengan i kali baris ke 1, maka diperoleh matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i & 2i \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks elementer diatas didapat solusi sebagai berikut:

$$x_1 + \qquad + ix_3 = 2i$$

$$+ x_2 - x_3 = 1$$

atau

$$x_1 = -ix_3 + 2i$$

$$x_2 = x_3 + 1$$

Misalkan $x_3 = p$ dengan p adalah sebarang nilai, maka

$$x_1 = -ip + 2i$$

$$x_2 = p + 1$$

Sehingga jika diambil $p = 0$, maka didapat solusi banyak dari sistem persamaan linear kompleks diatas adalah $x_1 = 2i, x_2 = 1$, dan $x_3 = 0$.

2.9 Invers Moore-Penrose

Definisi 2.16 [9]**:** Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{mxn}$ matriks A^+(*pseudoinverse*) merupakan matriks invers Moore Penrose dari matriks A jika memenuhi:

i. $AA^+A = A$

ii. $A^+AA^+ = A^+$

iii. $(AA^+)^* = AA^+$

iv. $(A^+A)^* = A^+A$

Dengan $*$ merupakan konjugat transpose dari suatu matriks.

Teorema 2.17 [4]: Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ dengan $rank(A) > 0$. Jika matriks $A = FG$ maka $A^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$

Bukti berdasarkan [4]:

Misalkan terdapat matriks $F \in \mathbb{R}_{m\times r}$ dan $G \in \mathbb{R}_{r\times n}$, dan $rank(A) > 0$. Akan ditunjukkan jika $A = FG$ maka $A^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$, dengan menunjukkan bahwa A^+ memenuhi keempat persamaan Moore Penrose sebagai berikut:

i. $AA^+A = FG\,G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*\,FG$

$$= F(GG^*)(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}(F^*F)G$$

$$= FG$$

$= A$

ii. $A^+AA^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*\,FG\,G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$

$= G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}(F^*F)(GG^*)\,(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$

$= G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$

$= A^+$

iii. $(AA^+)^* = ((FG)(G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)^*$

$= (G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)^*(FG)^*$

$= ((G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)^*(FG)^*)^*$

$= (FG)(G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)$

$= AA^+$

iv. $(A^+A)^* = ((G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)(FG)^*$

$= (FG)^*(G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)^*$

$= ((FG)^*(G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)^*$

$= (G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*)(FG)$

$= A^+A$

Karena A^+ memenuhi keempat persamaan di atas, maka terbukti bahwa $A^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$.■

Contoh 2.15:

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ akan dicari invers matriks Moore-Penrose dari matriks tersebut.

Penyelesaian:

Barikut ini adalah langkah-langkah mencari invers matriks Moore-Perose dari formula yang didapat yaitu [10]:

i. Mereduksi matriks A menjadi matriks eslon baris tereduksi dan misalkan matriks baru tersebut adalah Y.

Matriks Y yang terbentuk yaitu: $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii. Melihat kolom yang memuat satu utama dari matriks Y dan pilih kolom tersebut dari matriks A, misalkan matriks baru itu adalah F, lalu tentukan F^*, $(F^*F)^{-1}$.

Matriks F yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(F^*F)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -5 & -21/5 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

iii. Memilih baris yang tak nol dari matriks Y dan misalkan matriks G, tentukan $(GG^*)^{-1}$.

Matriks G yang diperoleh, yaitu:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(GG^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iv. Mencari $A^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -5 & -\frac{21}{5} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A^{+} adalah invers Moore-Penrose dengan memeriksa bahwa A^{+} memenuhi keempat sifat pada definisi 2.13 sebagai berikut:

i. $AA^{+}A = A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ii. $A^{+}AA^{+} = A^{+}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

iii. $(AA^{+})^{*} = AA^{+}$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iv. $(A^{+}A)^{*} = A^{+}A$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right)^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas dapat diketahui bahwa A^+ memenuhi kemepat persamaan dari Definisi 2.12, maka terbukti A^+merupakan invers Moore Penrose dari A.

Teorema 2.18 [4]: Diberikan $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ dan $B \in \mathbb{R}_{m\times n}$. A^+B adalah solusi kuadrat terkecil untuk $AX = B$.

Bukti berdasarkan [4]:

Diketahui $A \in \mathbb{R}_{m\times n}$ dan $B \in \mathbb{R}_{m\times n}$ dengan $AX = B$. Akan ditunjukkan bahwa A^+B merupakan solusi dari $AX = B$. Misalkan bahwa A^+B bukan solusi dari $AX \neq B$, sehingga $X \neq A^+B$, sehingga hasil yang diperoleh sebagai berikut:

$$X \neq A^+B$$
$$AX \neq AA^+B$$
$$AX \neq AA^+AX$$
$$AX \neq AX$$
$$AX \neq B$$

Pemisalan yang diperoleh $AX \neq B$, sedangkan pada teorema diketahui bahwa $AX = B$, sehingga kontradiksi dengan pemisalan $X \neq A^+B$. Maka terbukti bahwa $X = A^+B$ merupakan solusi dari $AX = B$, dengan A^+ merupakan invers Moore Penrose yang diperoleh dari matriks A yang terbentuk pada sistem persamaan linear. ■

Contoh 2.16:

Tentukan solusi sistem persamaan linear berikut menggunakan invers Moore Penrose:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 2$$
$$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 8x_4 = 3$$

Sistem persamaan tersebut dapat diubah menjadi $AX = B$, dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Barikut ini adalah langkah-langkah mencari invers matriks Moore-Perose dari formula yang didapat yaitu:

1. Mereduksi matriks A menjadi matriks eslon baris tereduksi dan memisalkan matriks baru tersebut adalah Y.

   Matriks Y yang terbentuk yaitu: $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Melihat kolom yang memuat satu utama dari matriks Y dan pilih kolom tersebut dari matriks A, misalkan matriks baru itu adalah F, lalu tentukan F^*, $(F^*F)^{-1}$.

   Matriks F yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$F^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(F^*F)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{46} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{1}{23} & \frac{7}{138} \end{bmatrix}$$

3. Memilih baris yang tak nol dari matriks Y dan misalkan sebagai matriks G, tentukan $(GG^*)^{-1}$.

   Matriks G yang diperoleh, yaitu:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$G^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(GG^*)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{81} & \frac{5}{81} \\ \frac{5}{81} & \frac{19}{81} \end{bmatrix}$$

4. Mencari $A^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{7}{81} & \frac{5}{81} \\ \frac{5}{81} & \frac{19}{81} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{46} & -\frac{1}{23} \\ -\frac{1}{23} & \frac{7}{138} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A^+ adalah invers Moore-Penrose dengan memeriksa bahwa A^+ memenuhi keempat sifat pada definisi 2.16 sebagai berikut:

i. $A^+A = A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

ii. $A^+AA^+ = A^+$

$$\begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix}$$

iii. $(AA^{+})^{*} = AA^{+}$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix}\right)^{*}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{69} & \frac{8}{69} & \frac{16}{69} \\ \frac{8}{69} & \frac{68}{69} & -\frac{2}{69} \\ \frac{16}{69} & -\frac{2}{69} & \frac{65}{69} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{69} & \frac{8}{69} & \frac{16}{69} \\ \frac{8}{69} & \frac{68}{69} & -\frac{2}{69} \\ \frac{16}{69} & -\frac{2}{69} & \frac{65}{69} \end{bmatrix}$$

iv. $(A^{+}A)^{*} = A^{+}A$

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix}\right)^{*}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{81} & \frac{5}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{22}{81} \\ \frac{5}{81} & \frac{19}{81} & -\frac{11}{27} & \frac{8}{81} \\ -\frac{1}{27} & -\frac{11}{27} & \frac{7}{9} & \frac{2}{27} \\ \frac{22}{81} & \frac{8}{81} & \frac{2}{27} & \frac{73}{81} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{81} & \frac{5}{81} & -\frac{1}{27} & \frac{22}{81} \\ \frac{5}{81} & \frac{19}{81} & -\frac{11}{27} & \frac{8}{81} \\ -\frac{1}{27} & -\frac{11}{27} & \frac{7}{9} & \frac{2}{27} \\ \frac{22}{81} & \frac{8}{81} & \frac{2}{27} & \frac{73}{81} \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan di atas dapat diketahui bahwa A^+ memenuhi keempat persamaan dari Definisi 2.16 maka matriks A^+ pada contoh ini disebut sebagai invers Moore Penrose dari A.

Kemudian menghitung $X = A^+B$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{34}{5589} & \frac{82}{5589} & \frac{95}{5589} \\ \frac{32}{5589} & -\frac{142}{5589} & \frac{199}{5589} \\ -\frac{10}{1863} & \frac{122}{1863} & -\frac{101}{1863} \\ \frac{103}{5589} & \frac{358}{5589} & \frac{233}{5589} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{7}{81} \\ \frac{5}{81} \\ -\frac{1}{27} \\ \frac{22}{81} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya subsitusikan solusi diatas kepersamaan awal, sehingga solusi tersebut memenuhi $AX = B$ dengan $X = A^+B$.

Sehingga didapat solusi untuk sistem persamaan di atas adalah

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{81} \\ \frac{5}{81} \\ -\frac{1}{27} \\ \frac{22}{81} \end{bmatrix}$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Adapun metode penelitian yang akan digunakan adalah studi literature dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan sistem persamaan linear kompleks.
2. Mengubah suatu sistem persamaan linear kompleks ke dalam bentuk persamaan matriks $AX = B$.
3. Mencari invers Moore Penrose dengan langkah sebagai berikut [4]:
   i. Mereduksi matriks $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ menjadi matriks eslon baris tereduksi dan misalkan matriks baru tersebut dengan matriks Y.
   ii. Melihat kolom yang memuat satu utama dari matriks Y dan pilih kolom tersebut dari matriks A, misalkan matriks baru tersebut adalah matriks F dan tentukan F^*, $(F^*F)^{-1}$.
   iii. Memilih baris yang tak nol dari matriks Y dan misalkan matriks tesebut adalah G, lalu tentukan G^* dan $(GG^*)^{-1}$.
   iv. Mencari $A^+ = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$.
4. Akan ditunjukkan bahwa A^+ adalah invers Moore Penrose dengan membuktikan A^+ memenuhi keempat sifat Definisi 2.16 sehingga dapat dikatakan bahwa A^+ merupakan invers Moore Penrose dari $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$.
5. Menghitung penyelesaian sistem persamaan linear berdasarkan Teorema 2.18 $X = A^+B$.
6. Mensubsitusikan solusi yang didapatkan ke persamaan awal sehingga solusi tersebut terbukti memenuhi $AX = B$ dengan $X = A^+B$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

1.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV, invers Moore Penrose dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks berbentuk $AX = B$ di mana matriks A adalah matriks kompleks $m \times n$ yang invertibel dan matriks kompleks $n \times n$ yang invertibel sehingga $X = A^{+}B$ dengan memperoleh solusi berupa solusi tunggal.

1.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis menggunakan metode invers Moore Penrose untuk menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks. Bagi pembaca yang berminat diharapkan dapat mencoba menggunakan metode lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

[1] W. Satin, *Menentukan invers moore penrose dari matriks kompleks*. 2011.

[2] Y. Dewi, “Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Kompleks Menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular (SVD),” 2012.

[3] P. Iswanti, “Invers Moore Penrose dan Aplikasinya Pada Sistem Persamaan Linear,” *Invers Moore Penrose dan Apl. Pada Sist. Persamaan Linear*, 2013.

[4] Y. Yanti, Helmi, dan M. Kiftiah, “Invers Moore Penrose Sebagai Invers Matriks,” vol. 08, no. 4, pp. 951–958, 2019.

[5] J. W. B. Churchill, Ruel V, *Complex Variables Eighth Edition*. 1990.

[6] H. Anton dan C. Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version, 9th Edition*. 2005.

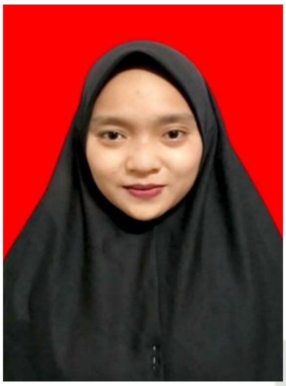
[7] S. T, dkk, *Teori dan Aplikasi Linear dan Matriks*. 2010.

[8] W. K. Nicholson, *Elementary Linear Algebra*, vol. first edit, no. 1. 2010.

[9] T. Britz, “The Moore-Penrose inverse of a free matrix,” no. June, 2019, doi: 10.13001/1081-3810.1196.

[10] M. C. Campbell SL, *Generalied Inverses of Linear Transformations*, vol. first edit. 2009.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan di Tanjung Enim tanggal 8 Januari 1997, sebagai anak pertama daritiga bersaudara. Penulis menyelesaikan Pendidikan Formal Sekolah Dasar di SD Negeri 066430 Medan tahun 2008. Pada tahun 2011 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di SMP Negeri 20 Medan dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di SMA Negeri 16 Medan pada tahun 2014 di Medan 2015 penulis melanjutkan Pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika. Penulis dinyatakan lulus ujian sarjana pada tanggal 1 Juli 2021 dengan judul Tugas Akhir **“*Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Kompleks Menggunakan Invers Moore Penrose*”** dengan dosen pembimbing Ibu Dr.Yuslenita Muda, M.Sc.